54-я Международная Тулиновская конференция – 2025 год

ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ СГУСТКА НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ НА ПРОВОДЯЩЕЙ МИШЕНИ В ВИДЕ ПРЯМОГО ДВУГРАННОГО УГЛА

В. В. Сыщенко*, А. И. Тарновский, В. А. Кривцов

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,

308015 Белгород, Россия

**e-mail: syshch@yandex.ru*

Переходное излучение на идеально проводящей поверхности может быть описано с помощью известного из электростатики метода изображений, когда граничный условия на поверхности металла удовлетворяются введением, наряду с реальным зарядом, падающим на мишень, одного или нескольких фиктивных зарядов («изображений» реального заряда).

Рассмотрим ситуацию, когда реальный заряд движется прямолинейно и равномерно со скоростью $\mathbf{v}_1$, достигая одной из двух полуплоскостей в момент времени $t = 0$ в точке с координатами x_0, y_0 (**рис. 1**).

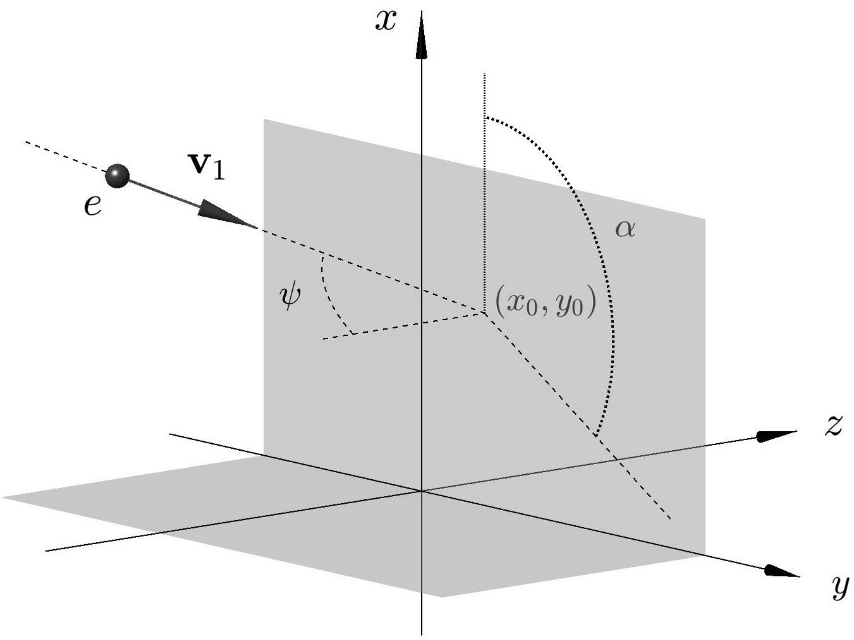

Рис. 1. Схема падения заряда e на проводящий двугранный угол.

Описание возникающего излучения нетрудно построить на основе известных формул (см., например, [1-3]), описывающих излучение произвольно движущегося точечного заряда. Амплитуда расходящейся волны векторного потенциала поля излучения пропорциональна величине

$$\mathbf{I} = e \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(t) \exp\left[i\left(\omega t - \mathbf{kr}(t)\right)\right] dt \,, \tag{1}$$

где ω и $\mathbf{k}$ – частота и волновой вектор излученной волны, $|\mathbf{k}| = \omega/c$, c – скорость света в вакууме, e, $\boldsymbol{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ – величина, траектория и скорость заряда, а спектрально-угловая плотность излучения выражается при этом формулой

$$\frac{dE}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{4\pi^2 c} |\mathbf{k} \times \mathbf{I}|^2. \tag{2}$$

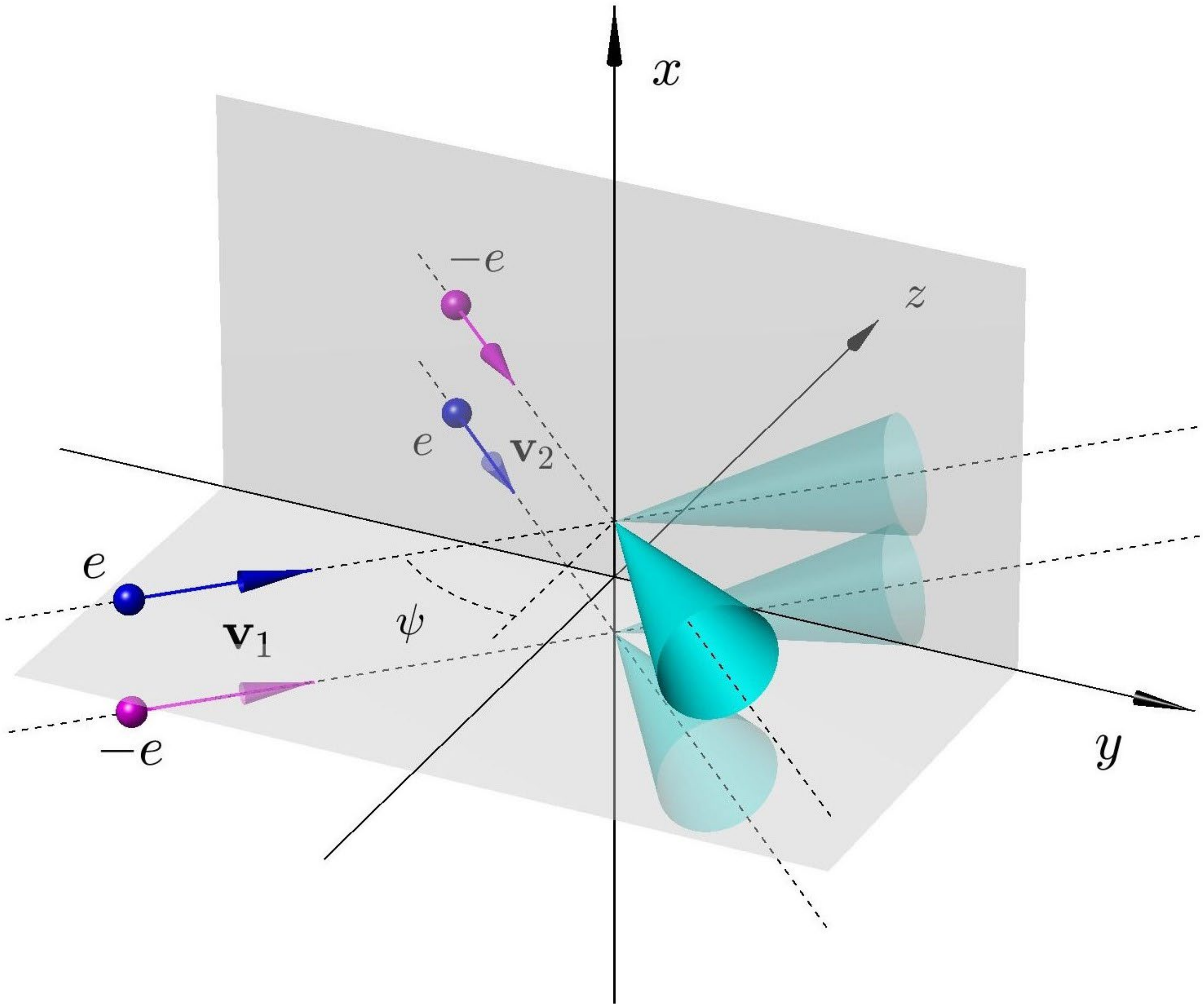

Рис. 2. Схематическое представление вклада в излучение реального заряда и трех его изображений (четырех слагаемых в (3)).

В нашем случае вектор **I** будет содержать четыре слагаемых, описывающих четыре парциальных вклада от падающей частицы и трех ее изображений:

$$\begin{aligned}\mathbf{I} = e\mathbf{v}_1 \int_{-\infty}^{0} \exp\left[i\left(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{v}_1 t - k_x x_0 - k_y y_0\right)\right] dt - \\ -e\mathbf{v}_2 \int_{-\infty}^{0} \exp\left[i\left(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{v}_2 t - k_x x_0 - k_y y_0\right)\right] dt - \\ -e\mathbf{v}_3 \int_{-\infty}^{0} \exp\left[i\left(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{v}_3 t + k_x x_0 - k_y y_0\right)\right] dt + \\ +e\mathbf{v}_4 \int_{-\infty}^{0} \exp\left[i\left(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{v}_4 t + k_x x_0 - k_y y_0\right)\right] dt\end{aligned} \qquad (3)$$

где x_0, y_0 – координаты точки падения частицы на плоскость $(x,\ y)$, $\mathbf{v}_1$ – скорость налетающей частицы, а скорости изображений $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ связаны с ней законами зеркального отражения.

Первая пара слагаемых в (3) описывает излучение, возникающее при падении частицы на бесконечную плоскость $(x,\ y)$, вторая – отражение этого излучения плоскостью $(y,\ z)$, различие в фазовых множителях описывает интерференцию этих двух вкладов. В зависимости от прицельного параметра и угла падения частицы эти интерференционные эффекты могут приводить к весьма причудливым формам углового распределения излучения [4]. В настоящей работе мы будем рассматривать простейший случай нормального падения частицы на плоскость $(x,\ y)$, так что $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_4$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1$, и нерелятивистской частицы, $|\mathbf{v}_1| \ll c$.

Обратимся к излучению плоского сгустка частиц (**рис. 3**), частицы которого пересекают плоскость $(x,\ y)$ в точках с координатами $\rho_i = (x_i, y_i)$. Рассмотрим сначала излучение на бесконечной плоскости $(x,\ y)$ в отсутствие горизонтальной проводящей плоскости $(y,\ z)$. В этом случае парциальный вклад i-ой частицы сгустка будет определяться первыми двумя слагаемыми в (3). Ограничиваясь здесь и ниже случаем нерелятивистских частиц, получим для такого парциального вклада

$$\mathbf{I}_i = -\frac{2ie}{\omega}\mathbf{v}_1 \exp(-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_0 - i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_i),$$

где $\boldsymbol{\rho}_0 + \boldsymbol{\rho}_i$ – координаты частицы в плоскости (x, y), причем $\boldsymbol{\rho}_0$ – координаты центра сгустка. Подстановка одного такого вклада в (2) приведет к диаграмме направленности излучения, представленной на **рис. 4** (вверху). Подстановка же суммы парциальных вкладов частиц сгустка в (2) даст

$$|\mathbf{k} \times \mathbf{I}|^2 = \frac{4e^2}{\omega^2}|\mathbf{k} \times \mathbf{v}_1|^2 \left|\sum_i e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_i}\right|^2. \tag{4}$$

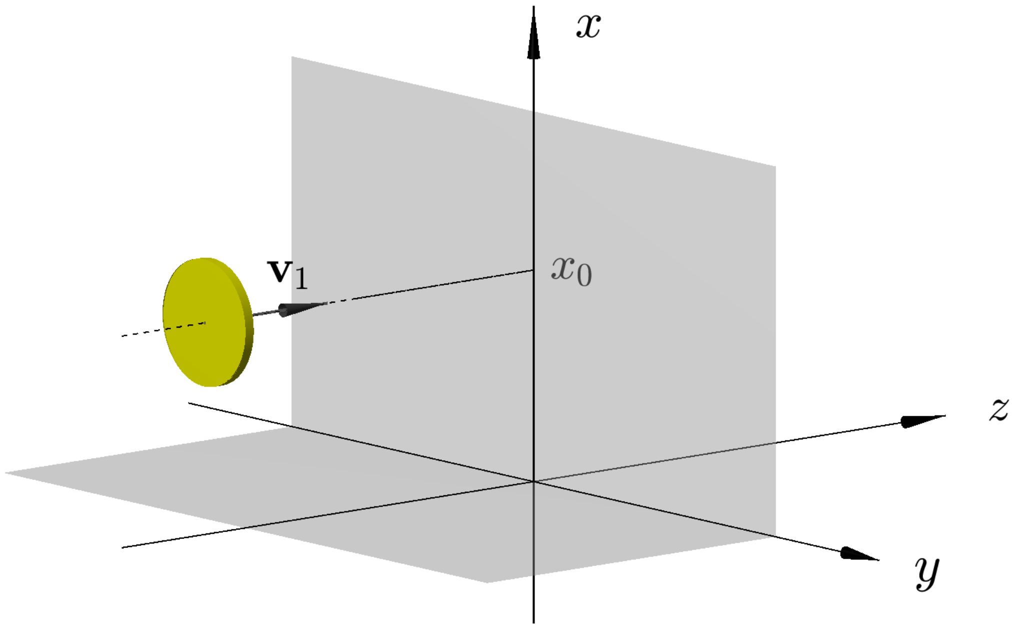

Рис. 3. Схема падения сгустка на мишень.

Последний множитель в (4) может быть преобразован к виду [5, 6]

$$\left|\sum_i e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_i}\right|^2 = N + N(N-1)|F(\mathbf{k}_\perp)|^2 \tag{5}$$

где первое слагаемое описывает некогерентный, а второе – когерентный вклад в спектрально-угловую плотность излучения и осуществлен переход от дискретного описания плотности заряда сгустка к непрерывному (плотность частиц $Nn(\boldsymbol{\rho})$, где N – полное число частиц в сгустке, а $n(\boldsymbol{\rho})$ нормирована на единицу), а величина

$$F(\mathbf{k}_\perp) = \int n(\boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{k}_\perp\boldsymbol{\rho}} d^2\rho\,, \tag{6}$$

называемая поперечным формфактором сгустка. Нетрудно найти, например, что для однородного плоского сгустка радиуса a с резким краем [7]

$$F(\mathbf{k}_\perp) = \frac{2}{k_\perp a} J_1(k_\perp a), \tag{7}$$

где $J_1(\xi)$ – функция Бесселя. Отсюда видно, что в случае, когда длина волны излучения окажется сравнима с радиусом сгустка, на диаграмму направленности, подобную приведенной на **рис. 4** (вверху), наложатся осцилляции, задаваемые квадратом функции Бесселя.

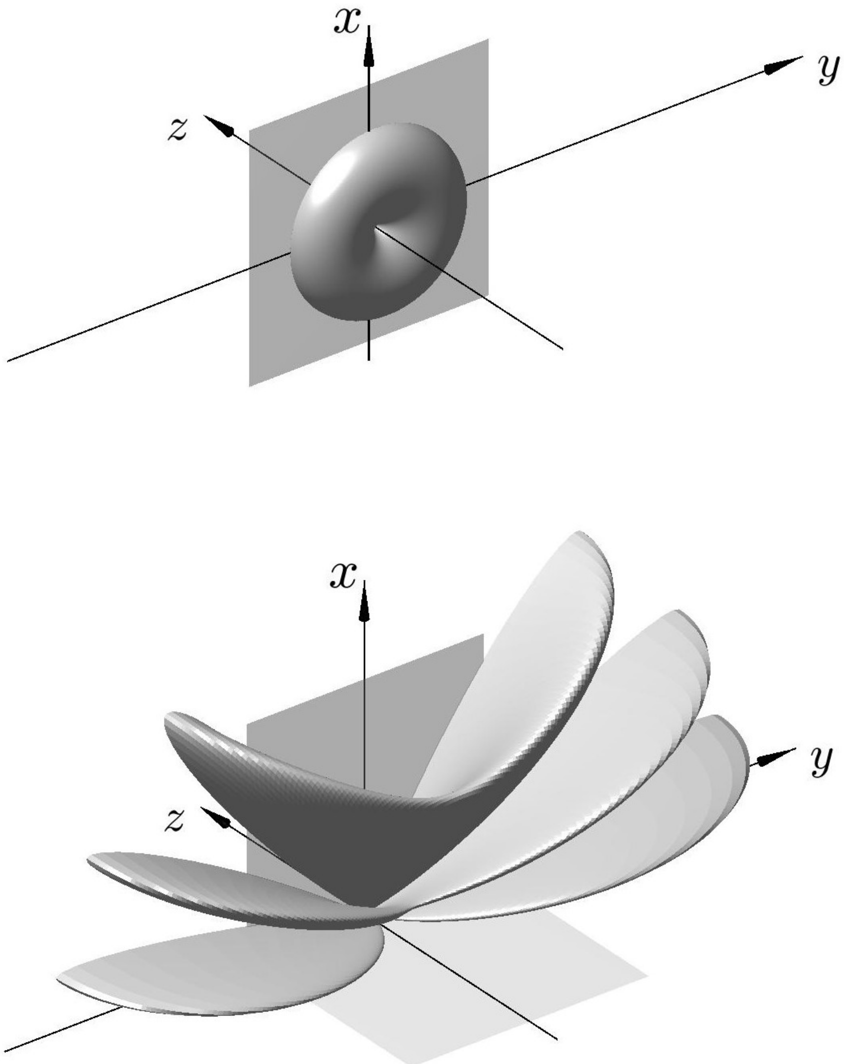

Рис. 4. Диаграмма направленности излучения нерелятивистской частицы на вертикальной плоскости (вверху) и с учетом влияния горизонтальной отражающей плоскости (внизу; $\psi = 0$, $v = 0.05c$, $x_0\omega/c = 10$).

Рассмотрим теперь влияние на переходное излучение сгустка горизонтальной проводящей плоскости (плоскости (y, z)). В этом случае интерференционный множитель в (4) будет равен

$$\left|\sum_i e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_i}\right|^2 = N(N-1)\left|F(k_x,k_y)\right|^2 + N + N(N-1)\left|F(-k_x,k_y)\right|^2 + N -$$
$$-e^{-2ik_x x_0}\left\{N(N-1)F(k_x,k_y)F^*(k_x,-k_y) + NF(2k_x,0)\right\} -$$
$$-e^{2ik_x x_0}\left\{N(N-1)F^*(k_x,k_y)F(-k_x,k_y) + NF(-2k_x,0)\right\}.$$

В случае чисто вещественного формфактора выражение упрощается:

$$\left|\sum_i e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{\rho}_i}\right|^2 = 4\sin^2(k_x x_0)\,N(N-1)\left|F(k_x,k_y)\right|^2 + \\ +2N[1-\cos(2k_x x_0)F(2k_x,0)]. \tag{8}$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что интенсивность излучения нерелятивистской частицы оказывается существенной в широкой области углов, как видно из **рис. 4**, в то время как излучение ультрарелятивистских частиц сосредоточено в узком конусе с углом полураствора порядка γ^{-1} (где γ – Лоренц-фактор частицы) [8]. Широкая диаграмма направленности излучения нерелятивистских частиц позволяет сравнительно легко извлечь информацию о формфакторе сгустка способом, описанным ниже.

Рассмотрим излучение нерелятивистского плоского круглого сгустка радиуса a, нормально падающего на проводящую мишень в виде двугранного угла, как показано на **рис. 3**. Пусть соотношение радиуса сгустка и длины излучаемой волны таково, что $a\omega/c = 5$, прицельный параметр центра сгустка составляет $x_0 = 5a$ (всегда можно положить $y_0 = 0$), число частиц в сгустке выберем равным $N = 50$.

Графики угловой зависимости интенсивности излучения в плоскости (x, z) для интервала углов $\pi/2 \le \theta \le \pi$ (азимутальный угол $\varphi = 0$) относительно направления $\mathbf{v}_1$ (или оси z), рассчитанной по формулам (2), (4), (7), (8), представлены на **рис. 5** и **6**. Там же отдельно показана интенсивность некогерентной составляющей излучения, определяемая вторым слагаемым в (8), а также показана интенсивность излучения такого сгустка на бесконечной плоскости.

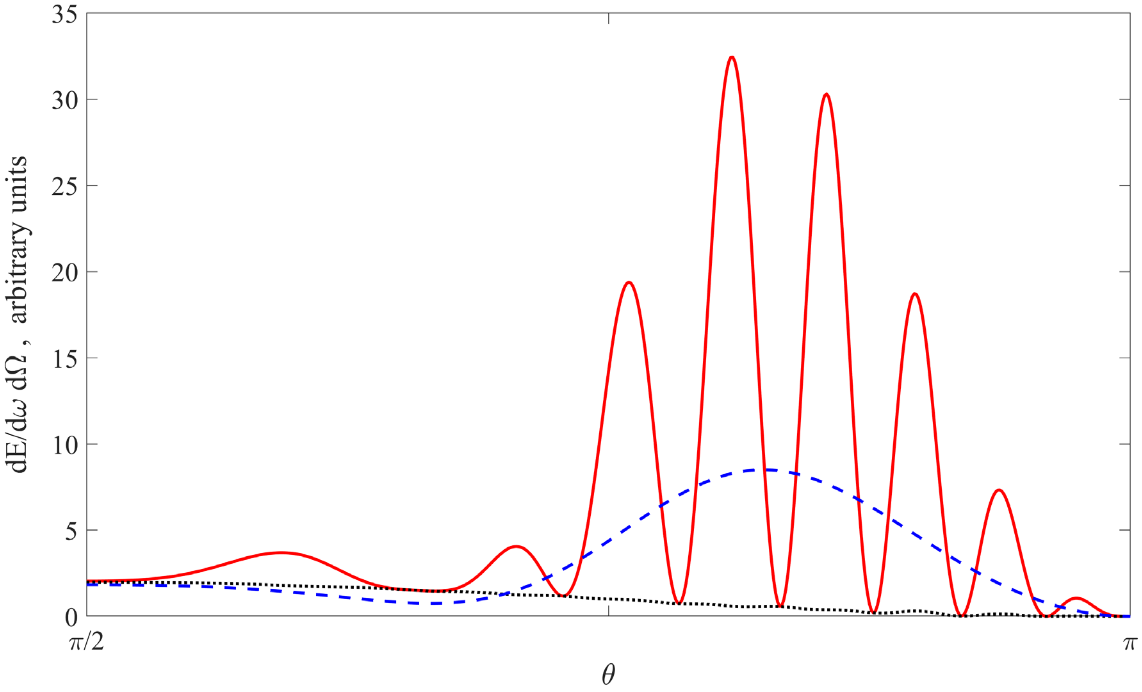

Рис. 5. Угловая зависимость интенсивности излучения в плоскости (x, z) сгустка нерелятивистских частиц для случая $a\omega/c = 5$, $x_0 = 5a$, *N = 50 (сплошная линия). Пунктиром отмечен вклад некогерентной части излучения, штриховой линией показано излучение такого же сгустка на бесконечной плоскости.*

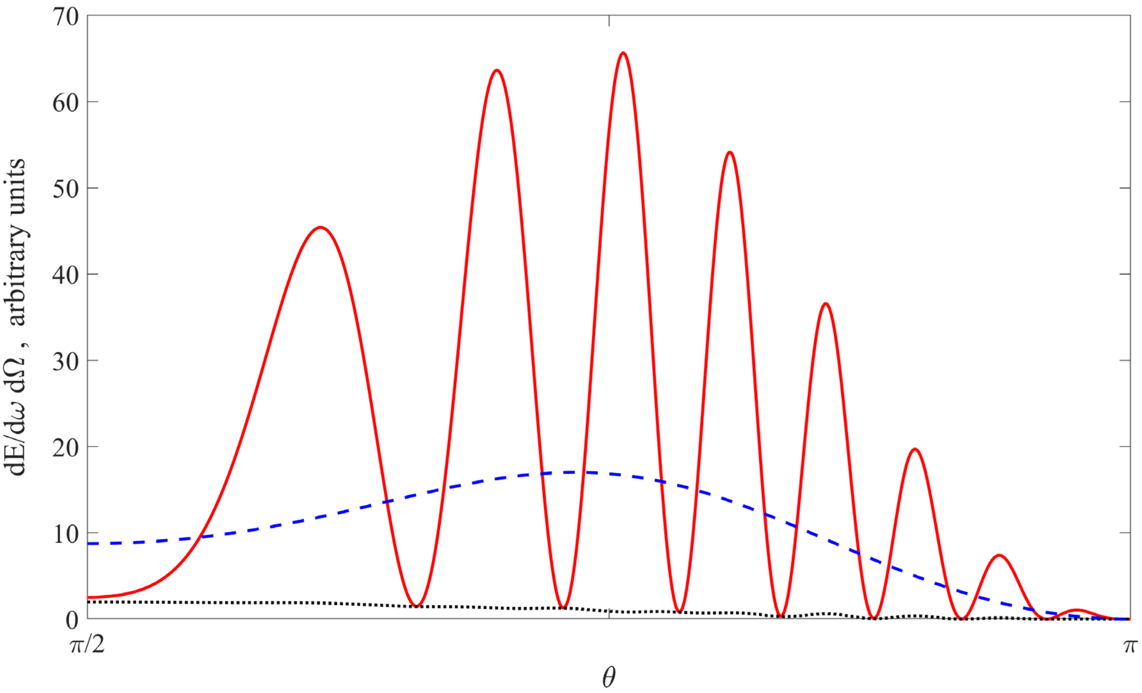

Рис. 6. То же, что и на рис. 5, для случая $a\omega/c = 2.5$, $x_0 = 10a$.

Мы видим, что при заданной длине волны излучения положения максимумов интенсивности в плоскости (x, z) определяются значением прицельного параметра центра сгустка x_0, а их относительная высота – радиусом сгустка.

Рассмотрим подробнее, каким образом можно извлечь эту информацию из экспериментально измеренной угловой зависимости интенсивности излучения при фиксированной частоте типа представленной на **рис. 5** или **6**. В пределе $N \gg 1$ интенсивность излучения в плоскости (x, z) с учетом (2), (4) и (8) будет пропорциональна

$$K(\theta) \propto k_x^2 \sin^2(k_x x_0)\, N^2 |F(k_x, 0)|^2, \tag{9}$$

где в плоскости (x, z) $k_x = (\omega/c)\sin\theta$. Положения максимумов интенсивности близки к положениям максимумов множителя $\sin^2(k_x x_0)$, хотя наличие других сомножителей в (9) несколько смещает их относительно точек, определяемых соотношением $k_x x_0 = (2j+1)\pi/2$, где j = 0, 1, 2… Поэтому оценка прицельного параметра центра пучка x_0 по формуле

$$x_0 = \frac{\pi c}{\omega(\sin\theta_n - \sin\theta_{n+1})}, \tag{10}$$

где θ_n и θ_{n+1} – положения двух последовательных максимумов в порядке возрастания угла излучения θ, будет содержать в себе некоторую погрешность, менее значительную в области $3\pi/4 \le \theta \le \pi$ (**рис. 7**, светлые значки). Гораздо более точный результат (**рис. 7**, темные значки) дает использование положений минимумов интенсивности, соответствующих обращению в нуль множителя $\sin^2(k_x x_0)$ в (9) и приводящее к формуле, полностью аналогичной (10), однако с экспериментальной точки зрения определение направлений минимумов интенсивности излучения может обладать большей погрешностью по сравнению с определением направлений максимумов.

Располагая оценкой x_0, по относительным значениям интенсивности в максимумах можно получить оценки значений квадрата формфактора для значений k_x, соответствующих направлениям максимумов.

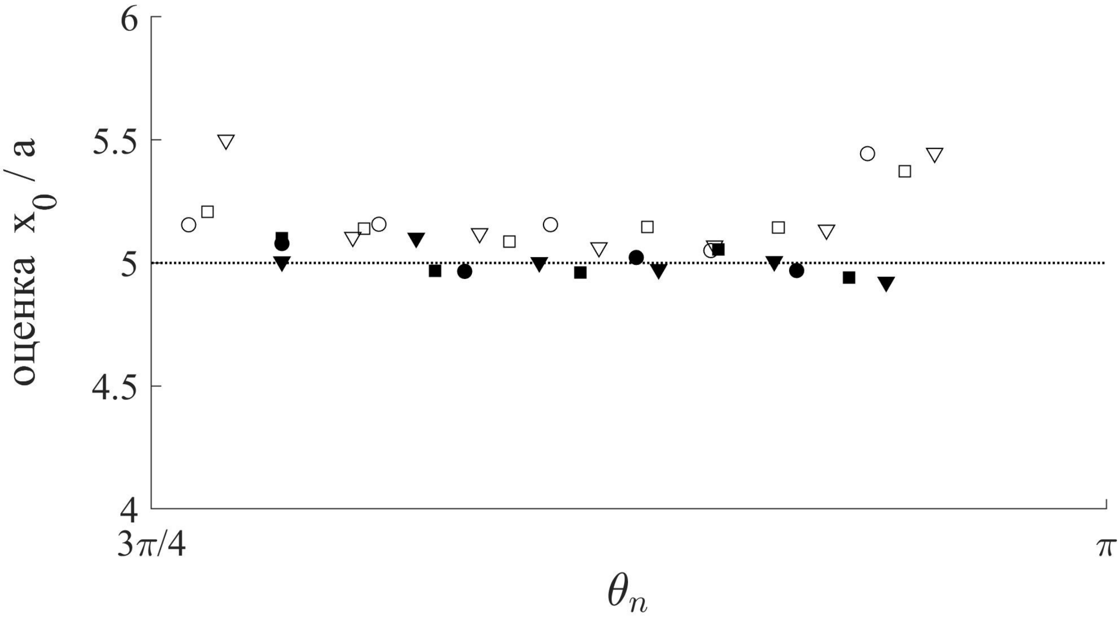

Рис. 7. Оценки значения x_0 по формуле (10), определяемые по положениям θ_n различных максимумов (светлые значки) и минимумов (темные значки) интенсивности излучения в плоскости (x, z) для различных значений частоты: $a\omega/c = 5$ *(кружки),* $a\omega/c = 6$ *(квадраты),* $a\omega/c = 7$ *(треугольники).*

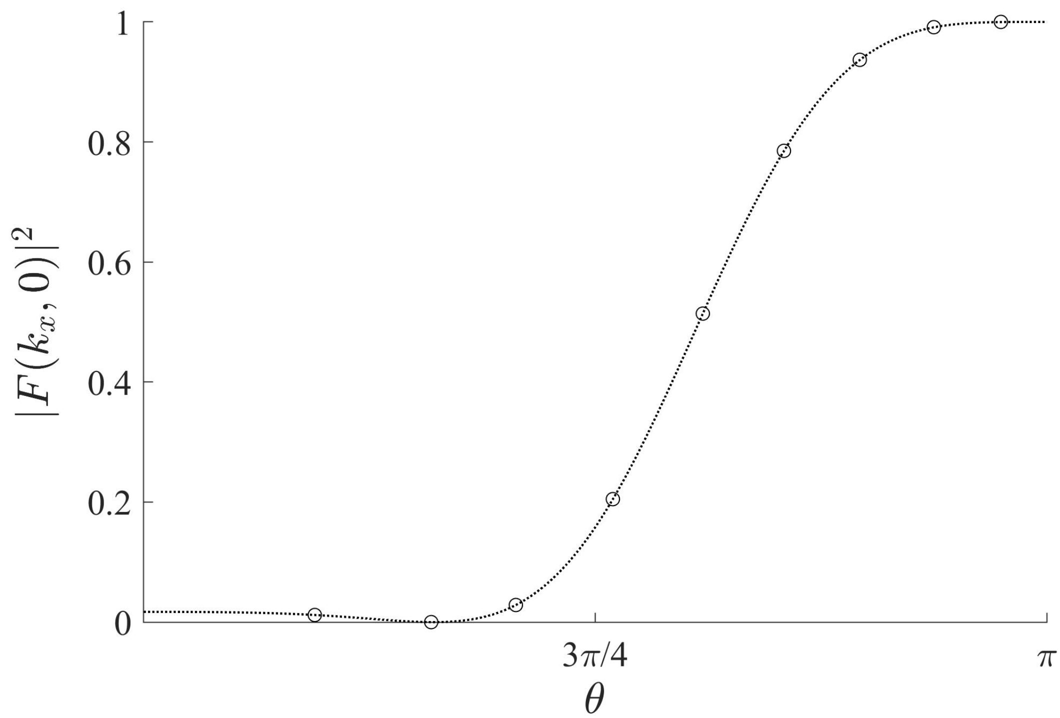

Рис. 8. Значения квадрата формфактора сгустка, оцененные с помощью формулы (11) по величине интенсивности в максимумах на частоте $a\omega/c = 5$ *(кружки) и вычисленные по точной формуле (7) (пунктирная линия).*

Действительно, из теории формфактора известно, что его значение стремится к единице при $\mathbf{k}_\perp \to 0$, в чем легко убедиться, выполнив соответствующий предельный переход в (6). С учетом этого положим приближенно $F(k_x, 0) = 1$ при k_x, соответствующем самому близкому к π значению θ_n (обозначим его θ_*). Тогда из (9) находим, что

$$|F(k_x(\theta_n),0)|^2 \approx \frac{K(\theta_n)}{K(\theta_*)} \frac{k_x^2(\theta_*)}{k_x^2(\theta_n)} \frac{\sin^2(k_x(\theta_*) \cdot x_0)}{\sin^2(k_x(\theta_n) \cdot x_0)}. \tag{11}$$

Пример результатов такого восстановления значений формфактора по интенсивности излучения в интерференционных максимумах, обусловленных наличием в составе мишени горизонтальной проводящей плоскости (y, z), представлен на **рис. 8**.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аббасов И. И., Болотовский Б.М., Давыдов В.А.* // УФН. 1986. Т. 149. Вып. 4. С. 709. https://doi.org/10.3367/UFNr.0149.198608f.0709
2. *Базылев В.А., Жеваго Н.К.* Излучение быстрых частиц в веществе и во внешних полях. М.: Наука, 1987. 272 с.
3. *Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф.* Электродинамика высоких энергий в веществе. М.: Наука, 1993. 344 с.
4. *Singh R., Reichert T., Walasek-Hoehne B.* // Phys. Rev. Accel. Beams. 2022. V. 25. 072801. https://doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.25.072801
5. *Потылицын А.П.* // Письма ЖЭТФ. 2016. Т. 103 (11). С. 762. https://doi.org/10.7868/S0370274X16110023
6. *Potylitsyn A.P., Ryazanov M.I., Strikhanov M.N., Tishchenko A.A.* Diffraction Radiation from Relativistic Particles (Springer Tracts in Modern Physics. Volume 239). Berlin Heidelberg: Springer, 2011. 278 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-12513-3
7. *Гарибян Г.М., Ян Ши.* Рентгеновское переходное излучение. Ереван: Изд. АН АрмССР, 1983. 320 с.
8. *Сыщенко В.В., Тарновский А.И., Кривцов В.А.* // Поверхность. 2024. № 5. С. 91. https://doi.org/10.31857/S1028096024050139