



# СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНЫХ ПРОЦЕССОВ МНОГОКРАТНОГО РАССЕЯНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В СЛОЕ ВЕЩЕСТВА

**Н.Н. Михеев**

*Институт кристаллографии им. А.В. Шубникова  
ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,  
Ленинский проспект, д.59, 119333, г. Москва, Россия*

**2021**

## ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ

Цель: Аналитическое описание энергетических и угловых спектральных распределений пучков быстрых протонов и альфа-частиц, прошедших пленочную мишень заданной толщины на основе практического применения новой статистической модели дискретных процессов многократного рассеяния [1–4].

1. В двухпоточковом приближении получить формулу для расчета значений наиболее вероятной энергии пучка частиц после прохождения пленки известной толщины.
2. Получить формулу для расчета глубины проникновения частиц в вещество при нормальном падении пучка на бомбардируемый образец.
3. Рассчитать транспортное сечение и транспортную длину частиц по неупругому каналу рассеяния.
4. Провести проверку полученных результатов на соответствие с экспериментальными данными, имеющимися в научных публикациях.

- 
1. Михеев Н.Н. // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2010, № 4, С. 25.
  2. Михеев Н.Н., Степович М.А., Юдина С.Н. // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2009. №3. С. 53.
  3. Mikheev N.N., Stepovich M.A. // Materials Science and Engineering. B, 1995, Vol. 32, № 1-2, P. 11.
  4. Михеев Н.Н. // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2020, № 3, С. 77

# ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТРАНСПОРТА БЫСТРЫХ ПРОТОНОВ В КОНДЕНСИРОВАННОМ ВЕЩЕСТВЕ ПРИ МНОГОКРАТНОМ РАССЕЯНИИ

Возможность использования статистической модели содержится в простом соотношении для однократного взаимодействия быстрого протона:

$$\frac{m_e}{M_p} \left[ E_0^2 - E_p^2 \right] J^2, \quad (1)$$

где:  $M_p$  и  $m_e$  – масса покоя протона и электрона; параметр  $J$  – усредненное определенным образом значение средней потенциальной энергии атомных электронов мишени

Результат рассеяния не зависит от энергии частицы. Это служит основой эффективного применения к множеству вероятных потерь энергии  $\epsilon_i$  законов дискретной статистики. При среднем числе  $n$  взаимодействий частицы в тонкой пленке необходимо лишь учесть статистическую вероятность такого состояния, которая равна логарифму числа перестановок из  $n$  элементов:

$$\frac{m_e}{M_p} \left[ E_0^2 - E_p^2 \right] J^2 \times \ln n! \quad (2)$$

Применив к логарифму формулу Стирлинга:

$$\ln n! \approx \left( n + \frac{1}{2} \right) \times \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi}, \quad (3)$$

получаем формулу для наиболее вероятной энергии пучка быстрых протонов, прошедших тонкую пленочную мишень и испытавших в ней  $n$  неупругих взаимодействий:

$$\frac{m_e}{M_p} \left[ E_0^2 - E_p^2 \right] nJ^2 \times \ln \left( \frac{n}{e} \right). \quad (4)$$

Такой подход впервые точно определяет число  $n$  неупругих взаимодействий, после которых процесс кратного рассеяния переходит в многократное рассеяние, то есть когда статистическая вероятность реализации состояния из  $n$  взаимодействий становится больше единицы. По формуле Стирлинга это число легко определить и оно равно шести.

# ТРАНСПОРТНОЕ СЕЧЕНИЕ И ТРАНСПОРТНАЯ ДЛИНА БЫСТРЫХ ПРОТОНОВ И АЛЬФА ЧАСТИЦ В МИШЕНИ

В практических приложениях теории рассеяния заряженных частиц в веществе исключительное значение имеет интеграл:  $\sigma_{tr} = \int 1 - \cos\theta \, d\sigma$ , который называется транспортным сечением и

который представляет собой усредненное по всем возможным угловым отклонениям сечение взаимодействия первичных частиц с веществом.

Использование при операции усреднения в интеграле наиболее вероятного сечения многократного неупругого рассеяния позволяет определить величину транспортного сечения для протонов по неупругому каналу  $\sigma_{tr}^{inel}$  в виде:

$$\sigma_{tr}^{inel} = \frac{4\pi q^4 Zz^2}{\frac{m_e}{M_p} \left( \frac{E_0^2}{c^2} \right)} \times \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ln \left[ \frac{2m_e V_0^2}{J^4 \sqrt{1-\beta^2}} \right].$$

И соответственно, транспортную длину по неупругому каналу рассеяния для пучка протонов  $L_{tr} = 1/(\sigma_{tr} \cdot N_0)$  как:

$$L_{tr}^{inel} = \frac{\frac{m_e}{M_p} \times E_0^2}{4\pi q^4 N_0 Zz^2 \times \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \times \ln \left[ \frac{2m_e V_0^2}{J \times \sqrt[4]{1-\beta^2}} \right]}.$$

## ГЛУБИНА ПРОНИКНОВЕНИЯ ПУЧКА БЫСТРЫХ ПРОТОНОВ И АЛЬФА ЧАСТИЦ В МИШЕНЬ ПРИ НОРМАЛЬНОМ ПАДЕНИИ ЧАСТИЦ НА ПОВЕРХНОСТЬ ОБРАЗЦА

Параметром, имеющим большое значение в практических приложениях, является глубина  $R_x$  максимального проникновения частиц в бомбардируемый образец. Она определяется толщиной слоя вещества, после прохождения которого средняя кинетическая энергия частиц  $E_m$  становится равной их тепловой энергии, то есть практически  $E_m \rightarrow 0$ :

$$R_x = \frac{\frac{m_e}{M_p} \times E_0^2}{4\pi q^4 N_0 Zz^2 \times \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \times \ln\left(\frac{m_e V_0^2}{J \times \sqrt[4]{1-\beta^2}}\right)},$$

Использование этой формулы для пучка протонов с энергией 19.68 МэВ и для пучка альфа-частиц с энергией 79.8 МэВ в алюминии дает  $R_x = 0.2076$  см для протонов и  $R_x = 0.2099$  см для ионов гелия. Экспериментально измеренные  $R_x$  в работе [Т+М] равны:  $0.2066 \pm 0.0035$  см и  $0.2103 \pm 0.0035$  см, соответственно. Для пучка протонов с энергией 49.1 МэВ в золоте расчет по формуле дает  $R_x = 0.2466$  см. Экспериментальное значение  $R_x$  из той же работы равно  $0.2461 \pm 0.0025$  см.

## ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ И УГЛОВЫХ ОТКЛОНЕНИЙ ПРИ МНОГОКРАТНОМ РАССЕЯНИИ

В общем виде функция распределения  $F(E_0, E_p)$  в статистике многократного рассеяния как решение одномерного транспортного уравнения, представима как:

$$F(E_p, u) = \exp \left\{ -\frac{\Delta E_p}{2\Delta E_{\min}} \times \exp \left[ -\int_{\epsilon_{\min}}^u \frac{ds}{\frac{1}{2} \ln s + 1 - s} \right] \right\}.$$

Здесь:  $\Delta E_p$  – наиболее вероятная суммарная потеря энергии ( $E_0 - E_p$ );  $u = \Delta E / \Delta E_p$ ;  $\Delta E_{\min} = \epsilon_{\max}$ .

После разложения  $\ln s$  в ряд Грегори и последующего учета вклада только первого члена разложения, мы получаем функцию  $F(\Delta E_p, \Delta E)$  первого приближения общего решения (8) в достаточно простом аналитическом виде:

$$F(\Delta E_p, \Delta E) = \exp \left[ -\frac{\Delta E - \Delta E_p}{2 \times \Delta E_{\min} \times \Delta E} \right].$$

При описании распределения пучка заряженных частиц по полярному углу  $\theta$  после их прохождения пленочной мишени известной толщины  $x$  при нормальном падении пучка на поверхность образца функция распределения:

$$F(\theta, \theta_p) = A \times \exp \left[ -\frac{\theta^2}{0.75\theta_p \theta + \theta_p} \right], \quad \text{а параметр} \quad \theta_p = \frac{\pi}{4L_{tr}^{inel}} \times x.$$

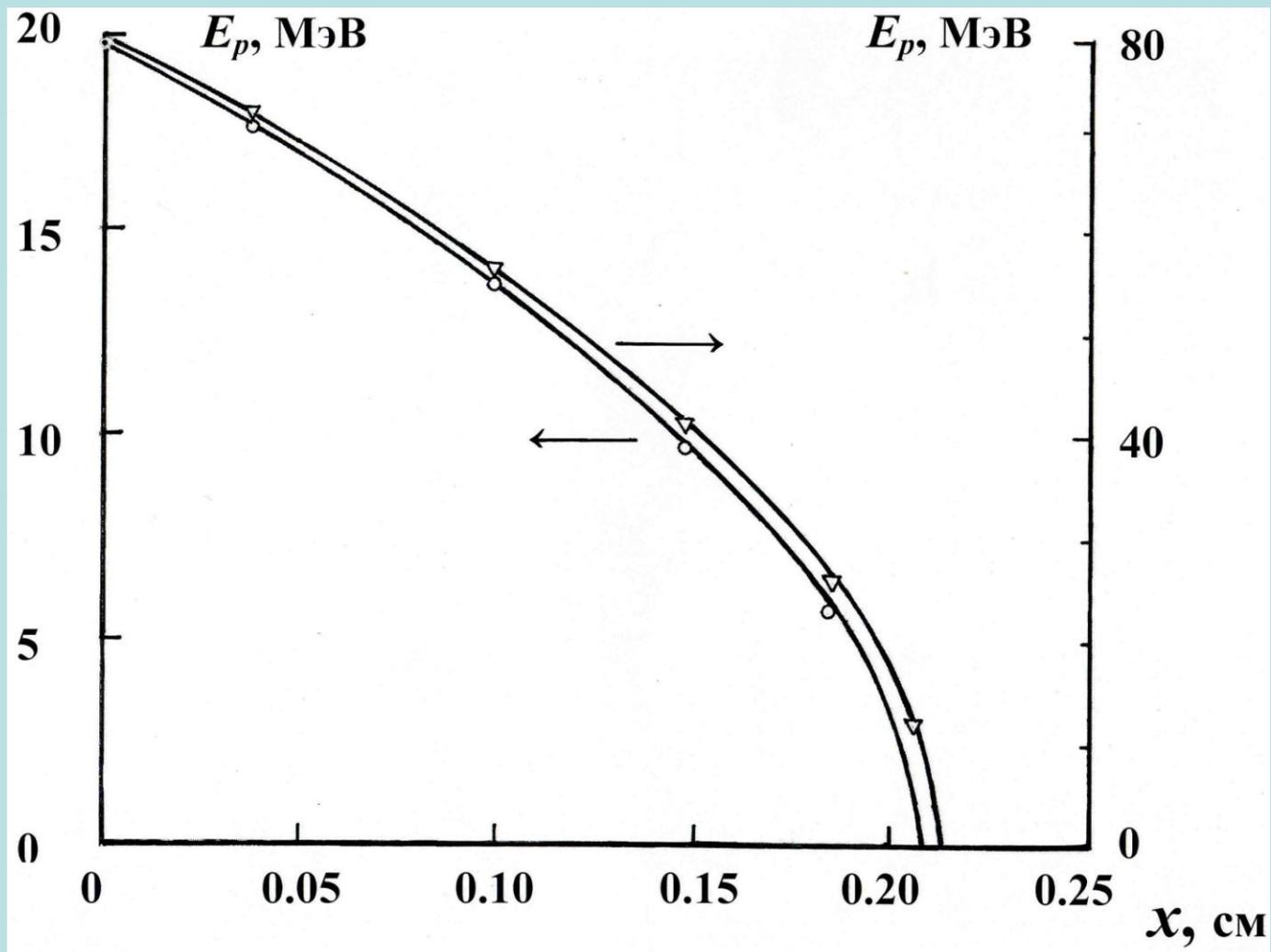
Здесь  $\theta_p$  – угол наиболее вероятного отклонения заряженных частиц при малоугловом рассеянии, и в тоже время – максимальный угол однократного отклонения в процессе многократного рассеяния.

**УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РАСЧЕТА НАИБОЛЕЕ  
ВЕРОЯТНОЙ ЭНЕРГИИ ПУЧКА БЫСТРЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ,  
ПРОШЕДШИХ СЛОЙ ВЕЩЕСТВА ЗАДАННОЙ ТОЛЩИНЫ**

$$\frac{m_e}{M_p} (E_0^2 - E_p^2) = 4\pi q^4 N_0 Z Z^2 x \times \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ln \left[ \frac{\left(2 - \frac{x}{R_x}\right) \times m_e V_0^2}{J \times \sqrt[4]{1-\beta^2}} \right],$$

Зависимость наиболее вероятной энергии  $E_p$  пучка быстрых частиц от толщины алюминиевой мишени: для протонов с начальной энергией 19.68 МэВ и для ионов гелия с начальной энергией 79.8 МэВ: сплошные кривые – расчет по формуле;  $\circ$  – экспериментальные результаты для протонов;

$\Delta$  – экспериментальные результаты для альфа-частиц работы *Tschalär C., Maccabee H.D. // Phys. Rev. B. 1970, Vol. 1, No. 7, P. 2863.*



## ДВУХПОТОКОВАЯ МОДЕЛЬ ТРАНСПОРТА БЫСТРЫХ ПРОТОНОВ В ВЕЩЕСТВЕ

Для протонов и альфа-частиц, совершенно также как и для пучка электронов, общий энергетический спектр прошедших пленку частиц представляет собой сумму спектров двух групп частиц:

$$N_T(\epsilon, E_{p1}, E_{p2}) = A_1 \exp\left[-\frac{(\epsilon_{p1} - E)^2}{0.5 \times m_e V_0^2 \times (\epsilon_0 - E)}\right] + A_2 \exp\left[-\frac{(\epsilon_{p2} - E)^2}{2 \times m_e V_0^2 \times (\epsilon_0 - E)}\right],$$

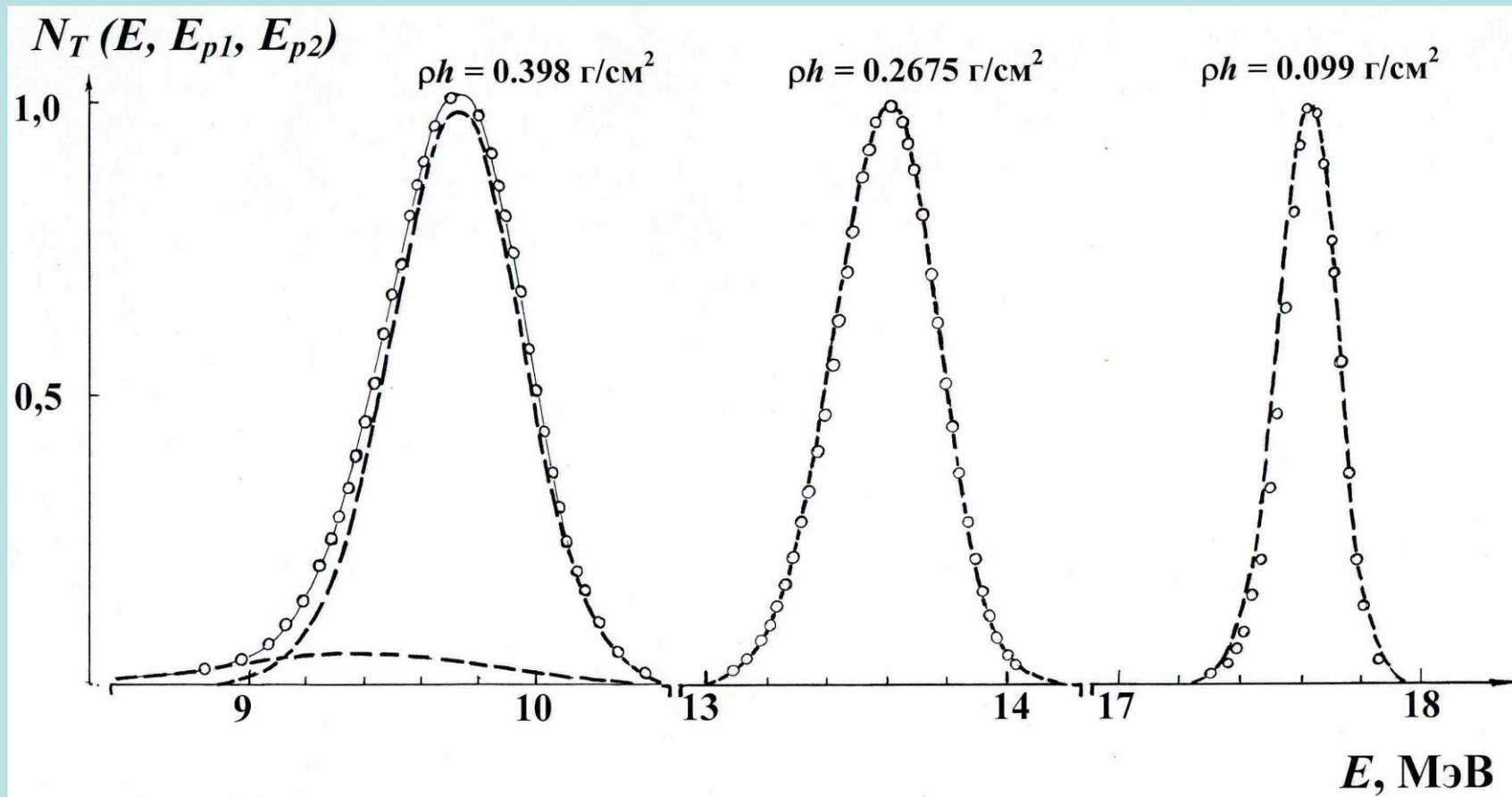
где:  $A_1, A_2$  – коэффициенты, учитывающие вклад каждого из двух потоков частиц в общий спектр.

Пример использования этой формулы для модельных расчетов, связанных с описанием экспериментальных спектров пучка протонов с  $E_0 = 19.68$  МэВ, прошедших алюминиевые пленки различной толщины, из работы: *Tschalär C., Maccabee H.D. // Phys. Rev. B. 1970, Vol. 1, No. 7, P. 2863,*

представлен на следующих слайдах

Энергетические распределения пучка протонов с начальной энергией  $E_0 = 19.68$  МэВ после прострела алюминиевых пленок различной толщины  $x$  (и средним числом  $n$  неупругих взаимодействий в мишени):  $x_1 = 0.0367$  см ( $n = 6 \times 10^5$ );  $x_2 = 0.0990$  см ( $n = 1.6 \times 10^6$ );  $x_3 = 0.1474$  см ( $n = 2.4 \times 10^6$ ). Пунктирные линии – рассчитанные вклады в спектры двух групп частиц;  $\circ$  – экспериментальные спектры работы:

*Tschalär C., Maccabee H.D. // Phys. Rev. B. 1970, Vol. 1, No. 7, P. 2863.*

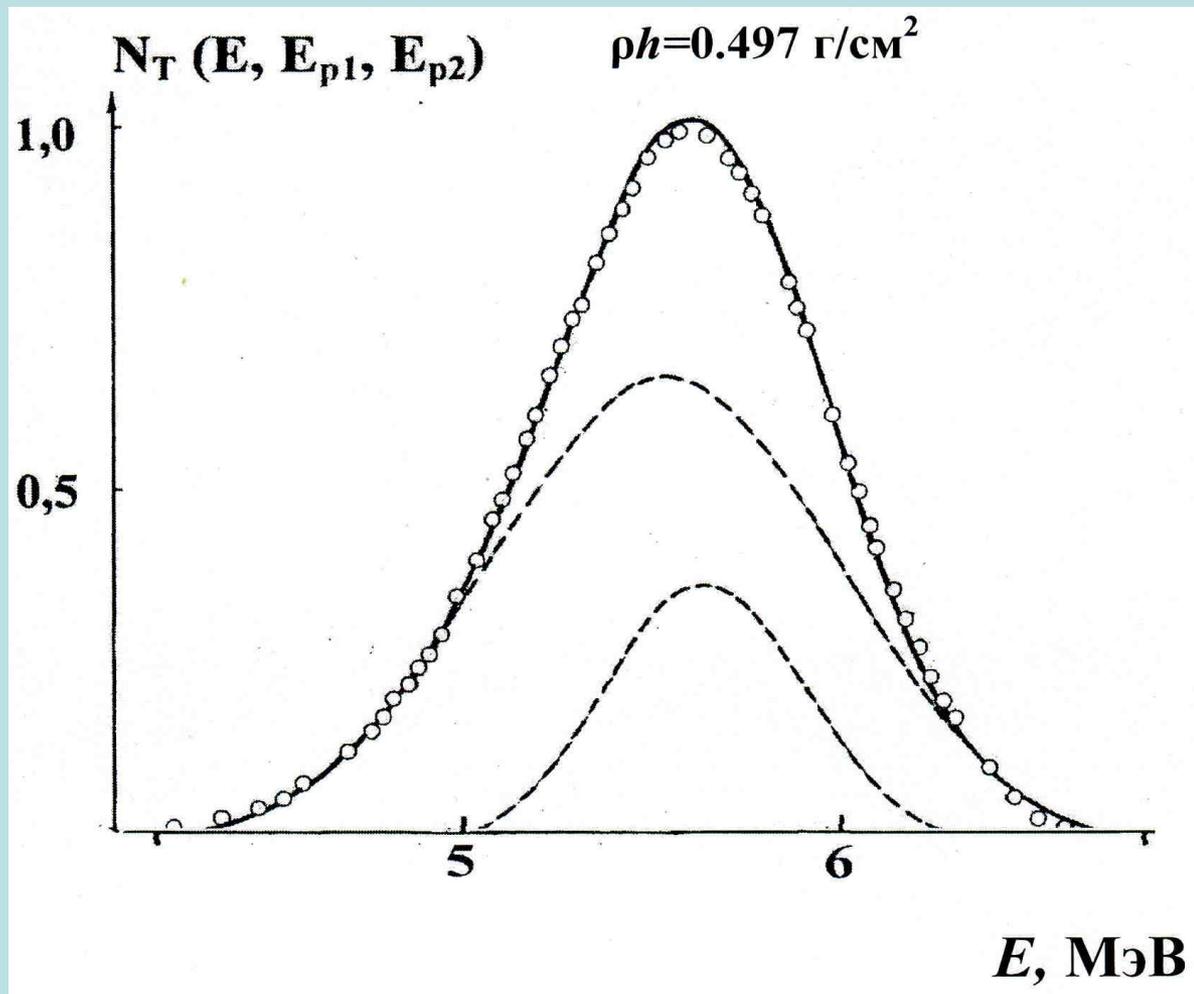


Энергетический спектр пучка протонов с начальной энергией  $E_0 = 19.68$  МэВ  
после прохождения алюминиевой пленки толщиной  $x = 0.1841$  см:

пунктирные линии – рассчитанные вклады в спектр двух групп частиц;

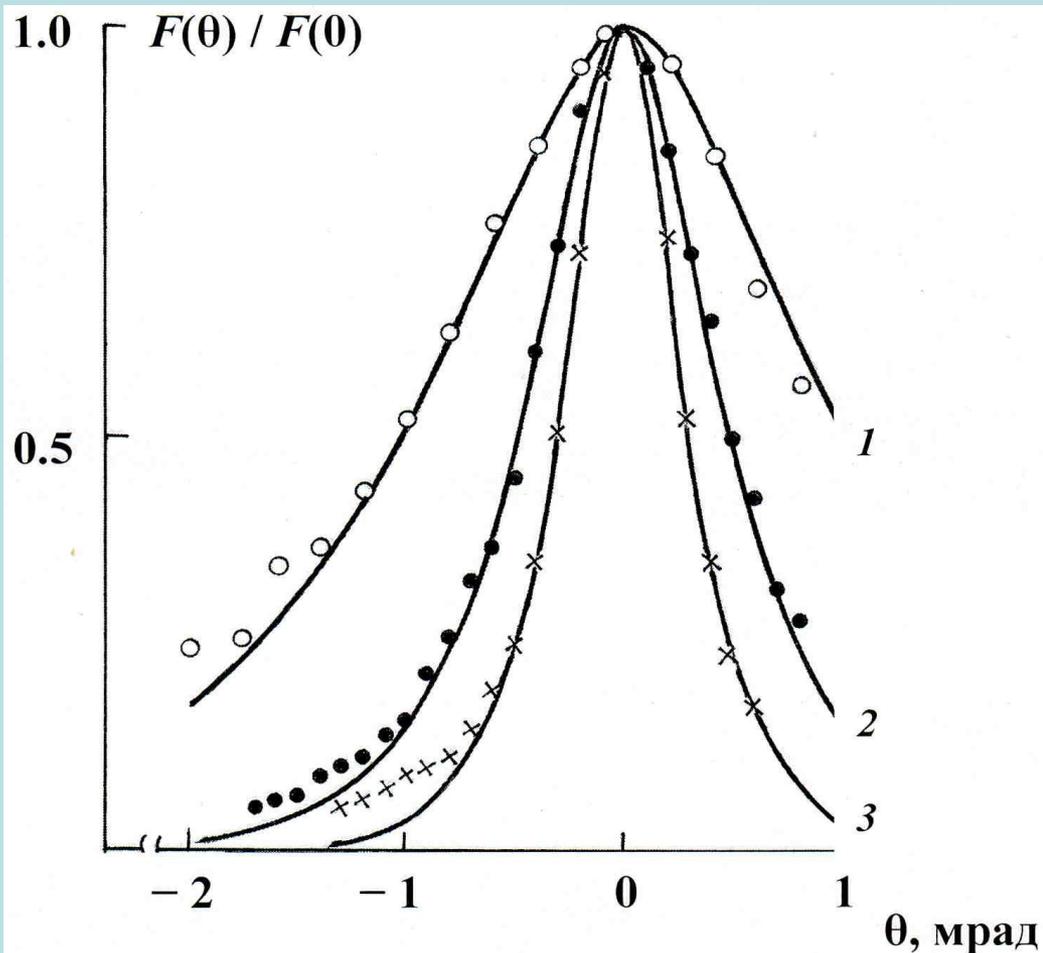
○ – экспериментальный спектр работы

*Tschalär C., Maccabee H.D. // Phys. Rev. B. 1970, Vol. 1, No. 7, P. 2863.*



## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО УГЛУ НАПРАВЛЕННОГО ПУЧКА ЧАСТИЦ, ПРОШЕДШИХ СЛОЙ ВЕЩЕСТВА, В РЕЖИМАХ «RANDOM» И КАНАЛИРОВАНИЯ

Спектры угловых отклонений направленного пучка протонов с начальной энергией  $E_0 = 10.3$  МэВ, прошедших тонкую монокристаллическую пленку кремния толщиной  $x = 0.91$  мкм, работы: *Ведьманов Г.Д. и др. // Известия РАН. Серия физическая. 1995. Т. 59. № 10. С. 141*, в режимах: «random» – (○), аксиального каналирования вдоль оси  $\langle 111 \rangle$  – (●), плоскостного каналирования вдоль плоскости  $\{100\}$  – (×); кривые 1, 2, и 3 – соответствующие этим режимам модельные расчеты.



## ВЫВОДЫ

- В результате проведенных исследований решена задача аналитического описания энергетических и угловых спектральных распределений пучков быстрых протонов и альфа-частиц, прошедших пленочную мишень заданной толщины.
- В двухпоточковом приближении получена формула для расчета значений наиболее вероятной энергии пучка частиц после прохождения пленки известной толщины.
- Получены формулы для расчета глубины проникновения частиц в вещество при нормальном падении пучка на бомбардируемый образец и для расчета транспортной длины по неупругому каналу рассеяния.
- Проведена их проверка на соответствие имеющимся в научных публикациях экспериментальным данным.

**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!**